Über die geordneten Mengen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung

der Doktorwürde

der

hohen mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der „Georgia-Augusta“

zu

Göttingen

Vorgelegt von: Gabriel Sudan
aus Bukarest

1925

Auszug aus „Bulletin des Sciences Mathématiques“
T. XXVIII 1925

Referent: Geheimrat Hilbert

Tag der mündlichen Prüfung: 20 Iuli 1925

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

BULETINUL DE ȘTIINȚE MATEMATICE
PURE ȘI APLICATE

ANUL XXVIII. 1925.

ÜBER DIE GEORDNETEN MENGEN [1]

VON

G. SUDAN

I.

§ 1. *Geordnete Menge.* Wir nennen eine Menge M geordnet, wenn es ein Gesetz gibt, so dass: wenn a und b zwei verschiedene Elemente von M sind, man eine von den beiden Beziehungen hat: $a < b$ (a kommt vor b) oder $b < a$ (b kommt vor a). Im übrigen müssen die zwei Eigenschaften gelten:

1) Es ist niemals $a < a$.

2) Wenn $a < b$ und $b < c$ dann ist auch $a < c$.

§ 2. *Ähnliche Mengen.* Zwei Mengen M und N heissen »ähnlich« $(M \backsim N)$ wenn eine (1,1) Beziehung folgender Art existiert: Sind a und b zwei Elemente von M, p und q die ihnen entsprechenden in N, und ist $a < b$ so ist $p < q$. Zwei ähnliche Mengen heissen von dem gleichen Ordnungs Typus.

§ 3. *Summe von geordneten Mengen.* Die Summe $M + N$ von zwei geordneten Mengen M und N, ist die Menge der Elemente von M und N und geordnet so dass wenn a und b zwei Elemente von $M + N$ sind, so gilt zwischen a und b: 1) dieselbe Ordnung wie vorhin, wenn a und b zu derselben Menge M oder N gehören; 2) $a < b$ wenn a zu M und b zu N gehört; 3) $b < a$ wenn a zu N und b zu M gehört.

§ 4. *Wohlgeordneten Mengen.* Wir nennen eine geordnefe Menge »wohlgeordnet«, wenn jede ihrer Teilmengen ein erstes Element besitzt, d. h. ein Element das vor allen anderen kommt.

[1] Inaug. Diss. Göttingen 1925.

§ 5. *Abschnitt.* Es sei $M = \{ \ldots\ldots m_n \ldots\ldots \}$ eine geordnete Menge. Betrachten wir das Element m_n. Die Teilmenge der Elemente m von M die der Bedingung

$$m < m_n$$

genügen, heisst der Abschnitt von m_n.

§ 6. *Mittelstrecke.* Wenn m_i und m_j zwei Elemente von M sind, so heisst die Teilmenge der Elemente m von M, die der Bedingung:

$$m_i < m < m_j$$

oder

$$m_j < m < m_i$$

genügen, die Mittelstrecke $m_i m_j$. Bezeichnung: $S_{m_i m_j}$.

II.

§ 7. *Klassification.* Wir klassifizieren folgendermassen die geordneten Mengen:

I-ste Klasse: Eine Menge M gehört zur ersten Klasse, wenn ein Element a_1 von M existiert so dass *alle* Mittelstrecken S_{ma_1} (wo m irgend ein Element von M bedeutet) wohlgeordnet sind.

Beispiele: 1) Die wohlgeordneten Mengen,

2) Die Menge: $\{ \ldots\ldots 5, 4, 3, 2, 1 \}$

2-te Klasse. M. gehört zur zweiten Klasse wenn

1) M nicht zur ersten Klasse gehört,

2) Es eine Teilmenge $\{a_1, a_2\}$ gibt so dass immer mindestens eine der beiden Mittelstrecken S_{ma_1}, S_{ma_2} wohlgeordnet ist.

Beispiel: $\{ \ldots\ldots 5, 4, 3, 2, 1, \ldots\ldots 5, 4, 3, 2, 1 \}$

n-te Klasse. M gehört zur n-ten Klasse wenn

1) M nicht zu einer niedrigeren Klasse gehört,

2) Es gibt eine Teilmenge von M, aus n Elementen $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ gebildet, so dass immer mindestens eine der Mittelstrecken: $S_{ma_1}, S_{ma_2}, \ldots\ldots S_{ma_n}$, wohlgeordnet ist für irgend ein m.

Beispiel: $\{ \underbrace{\ldots\ldots 5, 4, 3, 2, 1}_{A_1} \quad \underbrace{\ldots 5, 4, 3, 2, 1 \ldots}_{A_2} \quad \underbrace{\ldots 5, 4, 3, 2, 1.}_{A_n} \}$

Wenn wir $\Omega^* = \{ \ldots\ldots 5, 4, 3, 2, 1 \}$ setzen, kann das obige Beispiel folgendermassen durch Rekursion definiert werden:

$$A_1 = \Omega^*$$

$$A_{n+1} = A_n + \Omega^*$$

dann ist A_n eine Menge der n^{ten} Klasse. Daraus folgt, dass die Anzahl der Klassen unbegrenzt ist, und wenn n eine natürliche Zahl bedeutet ist die n^{te} Klasse nicht leer.

Wir nennen die Teilmenge $\{a_1, a_2, .. a_n\}$ von M, die in der Definition der Klasse von M auftritt, die »determinierende Menge« von M.

Transfiniete Klassen. Wenn n irgend eine Kardinalzahl bedeutet, so ist die Menge M von der n^{ten} Klasse, wenn mindestens eine der Mittelstrecken $S_{a_i m}$ (wo a_i ein Element einer gewissen Teilmenge N von M ist, die die Mächtigkeit n hat, und m irgend ein Element von M bedeutet) wohlgeordnet ist. (Selbstverständlich darf M nicht von einer niedrigeren Klasse sein). Genau so wie früher, heisst die Menge N eine determinierende Menge von M.

A

III.

Geordnete Mengen endlicher Klasse

§ 8. *Satz: Es sei M eine Menge von der n^{ten} Klasse, und sei $\{a_1, a_2, a_j, a_n\}$ eine determinierende Menge von M.* (Die Elemente a_j sind in derselben Ordnung wie in M geordnet).

Beh: Alle Elemente m von M, die der Bedingung $a_n < m$ genügen, bilden eine wohlgeordnete Menge.

Hilfsatz: Wenn alle Abschnitte einer geordneten Menge wohlgeordnet sind, ist die Menge selbst wohlgeordnet.

Bew: Es sei N eine solche Menge, und T eine Teilmenge von N (die nicht leer ist). Es sei b ein Element von T, und A_b und C_b die Abschnitte von b in T und N. Da C_b wohlgeordnet ist und A_b als Teilmenge enthält, so wird A_b ein erstes Element besitzen das auch erstes Element von T sein wird.

Bew: Es sei nun m ein Element von M, das der Bedingung $a_n < m$ genügt, und sei S_{ma_i} eine der wohlgeordneten Mittelstrecken die m entspricht. Da S_{ma_i}, S_{ma_n} als Teilmenge enthält, wird S_{ma_n} wohlgeordnet sein. Die Menge M' der Elemente m von M

hat also lauter wohlgeordnete Abschnitte und ist selber nach dem vorangehenden Hilfsatz wohlgeordnet.

Man schliesst daraus, dass, wenn M von der n^{ten} Klasse ist, die Mengen:

$$M + \{1\};\ M + \{1, 2, \ldots p\}\ (p \text{ endlich})$$
$$M + W\ (W = \text{wohlgeordnet})$$

von derselben Klasse aber von verschiedenen Ordnungstypen sind. Die Mengen einer Klasse n haben nicht alle dieselben Ordnungstypen.

§ 9. *Satz: Wenn m ein Element einer Menge von der n^{ten} Klasse ist, die die Mengc $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ als determinierende Menge hat, dann gibt es unter den Mittelstrecken:*

$S_{ma_1}; S_{ma_2}; \ldots S_{ma_n}$ (1) *eine und nur eine die wohlgeordnet ist.*

Bew: Wir bermerken im voraus, dass, da M von der n^{ten} Klasse ist, mindestens eine der Mittelstreken (1) wohlgeordnet sein muss. Es sei S_{ma_i} diese Mittelstrecke. Nehmen wir an, dass eine zweite solche S_{ma_p} existiert. Die Menge: $S_{ma_i} + \{m\} + S_{ma_p}$ (wenn S_{ma_i} und S_{ma_p} gemeinsame Elementen besitzen, werden diese nur einmal gerechnet) wird auch wohlgeordnet sein. Also $S_{a_i a_p}$ auch, und wenn daher, für irgend ein Element m_1, $S_{m_1 a_i}$ wohlgeordnet ist, so ist auch $S_{m_1 a_p}$ wohlgeordnet, und umgekehrt. Das Element a_p (oder a_i) ist also überflüssig und M ist von der $(n-1)^{ten}$ Klasse.

Die Elemente von M zerfallen also in n verschiedenen Kategorien entsprechend dem Element der determinierenden Teilmenge das die entsprechende wohlgeordnete Mittelstrecke bildet. Wenn M_{a_n} diejenige Teilmenge von M bezeichnet, die durch die Elemente von M gebildet ist, die zu a_n gehören, so zerfällt die Menge M in die n Mengen:

$$M_{a_1}; M_{a_2}; M_{a_3}; \ldots M_{a_n}.$$

§ 10. *Satz: Zwischen zwei Elementen* m_1 *und* m_2, *die zu derselben Teilmenge* M_{a_i} *gehören, gibt es kein Element das zu einer anderen Teilmenge* M_{a_j} *gehört.*

Bew. Es sei m'ein Element das zu M_{a_j} gehört so dass $m_1 < m' < m_2$. Die Mittelstrecke $S_{m'a_i}$ wird notwendigerweise in einer der beiden Mittelstrecken $S_{m_1 a_i}$ und $S_{m_2 a_i}$ als Teilmenge enthalten sein, was mit § 9. in Widerspruch steht.

Daraus folgt dass: Eine jede Menge n^{ter} Klasse ist die geordnete Summe von n Mengen erster Klasse. Wir schreiben:

$$M = M_{a_1} + M_{a_2} + \ldots + M_{a_n}.$$

IV

Menge 1^{ter} Klasse

§ 11. Es sei M eine Menge der ersten Klasse. *Alle Elemente einer Menge erster Klasse mit etwaiger Ausnahme eines einzigen, besitzen ein Element, das unmittelbar folgt.*

Mit anderen Worten: Wenn b ein Element von M ist, so gibt es immer (mit Ausnahme höchstens eines einzigen Falles) ein Element c das die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$1)\ b < c$$
$$2)\ S_{bc} = 0$$

Bew. Es sei b ein Element von M; dann ist entweder b das letzte Element von M, oder das ist nicht der Fall. Im zweiten Fall ist die Menge der Elementen die auf b folgen, gemäss § 8. wohlgeordnet, und hat deshalb ein erstes Element welches auch unmittelbar nach b folgt. Wenn b das letzte Element von M ist, hat er natürlich kein folgendes Element.

Hieraus folgt:

1) Das alle Elemente einer Menge N der n^{ten} Klasse ein Element, das unmittelbar folgt haben, mit Ausnahme von höchstens n Elementen.

2) Irgend ein Element m einer Menge M erster Klasse kann benutzt werden als determinierendes Element von M, denn wenn S_{ma_1} und S_{ba_1} wohlgeordnet sind, dann ist auch die Mittelstrecke S_{mb} wohlgeordnet. Es folgt dass um eine determinierende Menge einer Menge n^{ter} Klasse zu erhalten, es genügt ein und nur ein Element aus jeder der Mengen erster Klasse M_{a_i}, die sie bilden, herauszugreifen.

3) Die vorhergehende Bemerkung zeigt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Menge erster Klasse wohlgeordnet ist, darin besteht, dass sie ein erstes Element enthält.

§ 12. Unter den Mengen erster Klasse unterscheiden wir zwei Arten, je nachdem sie ein erstes Element enthalten oder nicht, d. h. je nachdem sie wohlgeordnet sind oder nicht. Im folgenden bezeichen wir mit M_a eine Menge der ersten Klasse, die nicht wohlgeordnet ist, und mit W eine wohlgeordnete Menge. Ohne weiteres haben wir :

Die Summe $M_a + W$ ist immer von der ersten Klasse, und die Summe $W + M_a$ ist immer von der zweiten Klasse; denn wäre $W + M_a$ erster Klasse, dann würde M_a wohlgeordnet sein als Teilmenge der Menge der Elemente die dem ersten Element von W folgen.

Man schliesst dass die Summe $M_a + M_b$ von zwei Mengen erster Klasse auch zweiter Klasse ist.

Bemerkung: Keine der Mengen M_{a_i} ($i = 2, 3, 4, \ldots n$) die die Menge M n^{ter} Klasse:

$$M = M_{a_1} + M_{a_2} + \ldots + M_{a_n}$$

bilden, kann wohlgeordnet sein. Denn wäre z. B. $M_{a_i} = W_{a_i}$ ($i \geq 2$) so würde folgen da die Summe $M_{a_{i-1}} + W_{a_i}$ von der ersten Klasse ist, dass das Element a_1 überflüssig ist in der determinierende Menge.

Nur M_{a_1} kann wohlgeordnet sein. Es ist also angebracht unter den Mengen n^{ten} Klasse zwei Arten zu unterscheiden je nachdem sie ein erstes Element besitzen oder nicht.

Also: *Wenn M b. z. w. N eine Menge m^{ten} b. z. w. n^{ten} Klasse bezeichnen, so ist die Summe $M+N$ von der $(m+n)^{ten}$ oder von der $(m+n-1)^{ten}$ Klasse, je nachdem N ein erstes Element* nicht *besitzt oder besitzt.*

V

Die Wohlordnung der Mengen endlicher Klasse.

§ 13. *Bemerkung. Für alle folgenden Ausfürungen setzen wir als Grundlage das von Zermelo aufgestellten Axiomensistem*[1]*. Das Auswahlaxiom wird aber fortgelassen.*

§ 14. **Satz** *Eine Menge 1^ter Klasse kann immer wohlgeordnet werden.*

Um den Beweis zu führen, werden wir folgenden Hilfsatz benutzen.

Hilfsatz: Wenn M eine wohlgeordnete Menge ist, die die Eigenschaft besitzt dass ein jedes Element derselben (mit Ausnahme des ersten) ein bestimmtes unmittelbar vorangehendes besitzt, und ferner M ein letztes Element hat, so hat M nur eine endliche Anzahl von Elementen.

Beweis des Hilfsatzes: Da M wohlgeordnet ist so hat jedes Element von M ein unmittelbar nachfolgendes Element. Es sei, a das erste und b das letzte Element von M, und nehmen wir an, dass M unendlich viele Elemente m hat, die der Bedingung

$$a < m < b$$

genügen. Wenn m_1 das unmittelbar nach a folgende Element ist, und m_2 das unmittelbar nach m_1 folgende, und m_n das unmittelbar nach m_{n-1} folgende u. s. w. so haben wir:

$M = \{a, m_1, m_2, \ldots . m_n \ldots .\} + B$. B ist die Menge der Elemente von M, die nicht in M_1 enthalten sind. B ist nicht leer denn da M ein letztes Element b besitzt, ist dieses in B enthalten. Es sei b_1 das erste Element von B. Jedes Element von M das b_1 vorangeht, ist in der Menge:

$\{a, m_1, m_2, \ldots m_n \ldots\} = \omega$ enthalten und b_1 kann also kein unmittelbar vorangehendes Element haben, was der Annahme wiederspricht.

Wir bemerken dass der vorangehende Hilfsatz zeigt dass jede Menge die bei der Umkehrung der Elemente (d. h. eine neue

[1]) *E. Zermelo*: »Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I«. Math. Ann. Bd. 65.

Ordnung der Elemente so dass, wenn man früher $a < b$ hatte, jetzt $b < a$ hat) immer wohlgeordnet bleibt, eine endliche Anzahl von Elementen besitzt.

Bew des Satzes: Es sei M eine Menge erster Klasse ohne ein erstes Element (der andere Fall ist trivial). Ein Element b von M teilt M in 3 Untermengen:

$$M = M_1 + \{b\} + M_2$$

M_1 ist die Teilmenge der Elementen von M die b vorangehen und M_2 ist die Teilmenge der Elementen von M die nach b folgen. M_2 ist nach § 8 wohlgeordnet.

M_1 enthält zwei Arten von Elementen: einige haben ein unmittelbar vorangehendes und ein unmittelbar nachfolgendes die andern haben kein unmittelbar vorangehendes. Es sei

$$M_3 = \{\ldots . t_3, t_2, t_1\}$$

die Menge dieser letzten. M_3 kann leer sein oder sie besitzt ein erstes Element, oder sie hat kein erstes Element.

Im ersten Fall werden wir die Menge M_1, der b vorangehenden Elemente betrachten. Im zweiten Fall werden wir als determinierendes Element von M (statt b) ein b′ Element nehmen, das dem ersten Element von M_3 vorausgeht. In beiden Fällen teilen wir also M in zwei Teilmengen: die eine ist wohlgeordnet (nach § 8), die andere nicht, aber jedes ihrer Elemente hat ein unmittelbar vorangehendes und ein unmittelbar folgendes.

$$M = M_1' + M_2'$$

(b′ wird zu M_1' gerechnet werden)

Um M wohlzuordnen werden wir:

1) Die Elemente von M_2' in ihrer gegenwärtigen Ordnung belassen;

2) Die Ordnung der Elemente die M_1' bilden umkehren.

Es sei m ein Element von M_1'. Der Abschnitt A_m von m in der neuen Anordnung von M_1', geht hervor aus der Umkehrung der Mittelstrecke $S_{mb'}$, die da sie wohlgeordnet ist und ein letztes Element b′ hat und da sie die Eigenschaft besitzt, dass ein jedes von ihren Elementen ein bestimmtes Element hat das ihm unmittelbar vorangeht, dem vorangehendem Hilfsatz gemäss nur

eine endliche Anzahl von Elementen enthalten kann und nach Umkehrung wohlgeordnet bleibt. Die umgekehrte Menge M′ enthält also nur wohlgeordnete Abschnitte und ist gemäss dem Hilfsatz § 8 auch wohlgeordnet.

Für dem Fall dass :

$$M_3 = \{\ldots t_3, t_2, t_1\}$$

kein erstes Element enthält, gehen wir wie folgt vor :

Da M kein erstes Element enthält, enthält sie sicher eine Menge der Typus

$$\omega^* = \ldots\ldots l_5, l_4, l_3, l_2, l_1.$$

Andrerseits kann eine Menge erster Klasse, eine Menge folgenden Types

$$1 + \omega^* = l_1, \ldots\ldots l_5, l_4, l_3, l_2, l_1$$

nicht enthalten, denn dann wäre die Mittelstrecke S_{l_1, l_1} z. B. nicht wohlgeordnet. Man schliest dass es für irgend ein Element a von M zwei Elemente von ω^*: l_{n+1}, l_n gibt, so dass die folgende Ordnung besteht (in M)

$$l_{n+1} < a < l_n$$

Wir kehren jetzt alle Mengen der Elemente die zwischen zwei Elementen von ω^* existieren, um, und dann kehren wir die ganze Menge M nochmals um, so dass wenn a und b zwei Elemente von M bedeuten, die sich zwischen denselben Elementen von ω^* befinden und :

$$l_{n+1} < a < b < l_n$$

ist, dann werden wir nach der vorangehenden Operation immer $a < b$ haben, aber

$$l_n < a < b < l_{n+1}$$

Es ist ohne weiteres klar, dass die so geordnete Menge M, wohlgeordnet sein wird.

§ 15. Jede Menge erster Klasse kann also wohlgeordnet werden. Es folgt dass jede Menge endlicher Klasse auch wohlgeordnet werden kann. Sie kann ausserdem derart geordnet werden, dass sie zu irgend einer unteren Klasse gehört, nämlich wenn wir eine passende Anzahl von M_{a_i} Mengen din M zusammensetzen

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_{a_i}$$

wohlordnen.

Andrerseits enthält jede wohlgeordnete unendliche Menge, immer p Mengen von dem Typus $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (p irgend eine natürliche Zahl). Es folgt daraus dass eine Menge n^{ter} Klasse derart geordnet werden kann, dass sie von irgend welcher *unteren* oder *höheren* Klasse ist.

Beispiel: Um

$$\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

zur n^{ten} Klasse zu ordnen, werden wir sie schreiben:

$$\begin{array}{l} \omega = 1\ ,\ n+1\ ,\ 2n+1\ ,\ \ldots\ m.n+1\ \ldots \\ \quad\ 2\ ,\ n+2\ ,\ 2n+2\ ,\ \ldots\ m.n+2\ \ldots \\ \quad\ 3\ ,\ n+3\ ,\ 2n+3\ ,\ \ldots\ m.n+3\ \ldots \\ \quad\ \ldots\ ,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \quad\ n\ ,\ 2n\ ,\ 3n\ ,\ \ldots\ m.n+n\ \ldots \end{array}$$

und dann

$$\begin{array}{l} \omega = \ldots\ m.n+1\ \ldots\ 2n+1\ ,\ n+1\ ,\ 1 \\ \quad\ \ldots\ m.n+2\ \ldots\ 2n+2\ ,\ n+2\ ,\ 2 \\ \quad\ \ldots\ m.n+3\ \ldots\ 2n+3\ ,\ n+3\ ,\ 3 \\ \quad\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \quad\ \ldots\ (m+1)n\ \ldots\ 3n\ ,\ 2n\ ,\ n \end{array}$$

VI.

Die Ordnungstypen.

§ 16. *Die Cantorsche-Normalform der Mengen endlicher Klasse.* Zwei Mengen verschiedener Klassen können niemals ähnlich sein. Ihre Ordnungstypen sind infolgedessen immer verschieden.

Die geordneten Mengen bei denen alle Teilmengen ein letztes Element besitzen, sind ganz analog der wohlgeordneten Mengen. Die Umkehrung einer solchen Menge führt zu einer wohlgeordneten Menge. Wir werden sie »wohlgeordnet*« Mengen nennen. Der Abschnitt* m_n einer wohlgeordneten* Menge M, von welcher m_n ein Element ist, ist die Menge der Elemente m von M die der Bedingung $m_n < m$ genügen; und der Rest* m_n ist die Menge der Elemente m von M die der Bedingung $m_n >$

m genügen. Für die Ordnungstypen* von diesen Mengen werden wir folgende Reihe haben:

$$\ldots 2+\omega^*;\ 1+\omega^*;\ \omega^*\ldots n;\ \ldots 2;\ 1;\ 0$$
$$\ldots n+\omega^*.m\ldots.\ \omega^*.3\ldots 1+\omega^*.2;\ \omega^*.2$$
$$\ldots \omega^{*3}:\ldots\omega^*+\omega^{*2}\ldots 1+\omega^{*2};\ \omega^{*2}=(\omega^*.\ \omega^*)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ \omega^{*n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo $\omega^*=\{\ldots\ldots 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.\}$

Für zwei Ordnungstypen*: ν^* und μ^* haben wir immer

1) $\nu^*+\mu^*>\mu^*$
2) $\mu^*+\nu^*\geq\mu^*$

Wie für die wohlgeordneten Mengen[1]) ein Haupttypus* ist ein Typus der mit allen seinen Resten* gleich ist. Wenn h^* ein solcher Haupttypus* bedeutet, und ferner:

$$\alpha^*<h^*$$

dann ergibt sich:

$$h^*=h^*+\alpha^*$$

Die Umkehrung der Cantorsche Normalform der wohlgeordneten Mengen führt zu:

$$\mu^*=\omega^{*\alpha^*_m}.\ r_m+\omega^{*\alpha^*_{m-1}}r_{m-1}+\ldots.+\omega^{*\alpha^*_1}.\ r_1+\omega^{*\alpha^*_0}.\ r_0$$
$$\text{wo}\quad \alpha^*_0>\alpha^*_1>\ldots.>\alpha^*_{m-1}>\alpha^*_m$$

und wo $r_0,\ r_1,\ \ldots\ldots,\ r_{m-1},\ r_m$ natürliche Zahlen bedeuten.

§ 17. *Menge erster Klasse.* Es sei M eine Menge erster Klasse. Dann können drei Fälle vorkommen:

1) M hat ein erstes Element. So ist sie wohlgeordnet und infolgedessen hat sein Ordnungstypus die Form:

$$\mu=\omega^{\alpha_0}r_0+\omega^{\alpha_1}r_1+\ldots\quad\ldots+\omega^{\alpha_m}r_m$$

2) M hat kein erstes Element, aber M_2 hat ein erstes Element. So folgt:

$$M=M_1'+M_2'$$

M_1' ist nicht wohlgeordnet, aber jedes ihrer Element hat ein unmittelbar vorangehendes. M_2' ist wohlgeordnet.

[1]) Vergleich: *Hessenberg*: »Grundzüge der Mengenlehre« aus »Abhandlungen der Friesschen Schule« I.

Der Hilfsatz § 14) zeigt dass jeder Abschnitt* von M_1' eine endliche Anzahl von Elementen hat. Also:

$$M_1' = \omega^*$$

$$\text{und } M = \omega^* + \omega^{\alpha_0} r_0 + \omega^{\alpha_1} r_1 + \ldots\ldots + \omega^{\alpha_m} r_m$$

$$\text{wo } \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots\ldots > \alpha_m$$

Ordnungszahlen bedeuten.

3) M hat kein erstes Element und M_3 auch nicht. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, kann man voraussetzen dass M ein letztes Element hat, das wir als determinierendes Element nehmen werden. Indem wir die Operation, die uns gestattet hat die Mengen, die zu diesem 3ten Fall gehören, wohlzuordnen, im umgekehrten Sinn anwenden auf die Formel =

$$\omega^{\alpha_0} r_0 + \omega^{\alpha_1} r_1 + \ldots\ldots + \omega^{\alpha_n} r_n$$

sieht man, dass die Mengen der 3ten Kategorie erhalten sind, indem man in

$$\omega^* = \ldots\ldots 5, 4, 3, 2, 1$$

jedes Element durch eine wohlgeordnete Menge ersetzt. Der Ordnungstyp dieser Mengen wird folgende Form haben:

$$\mu = \ldots\ldots + h_{\alpha_3} + h_{\alpha_2} + h_{\alpha_1} + h_{\alpha_0}$$

wo h_{α_1} ; h_{α_2} ; h_{α_3} . . etc. Hauptzahlen bedeuten und wo

$$\ldots \alpha_3 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_0 .$$

(denn ein kleinere Ordnungstyp hat keinen Einfluss auf seinen folgenden, wenn dieser grösser ist).

Dieser letzter Fall enthält auch die vorhergehenden 1) und 2) wenn man in $\omega^* =$ für 1) von einem bestimmten Element zur Linken, alle Elemente durch die Nullmenge ersetzt: für 2) von einem bestimmten Element zur Linken alle Elemente durch die Menge {1} ersetzt.

Hieraus folgt sofort dass der Ordnungstyp einer Menge nter Kasse, folgende Form hat =

$$\mu = \ldots\ldots + h_{\gamma_1} + h_{\gamma_0} + \ldots\ldots + h_{\beta_2} + h_{\beta_1} + h_{\beta_0} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + h_{\alpha_2} + h_{\alpha_1} + h_{\alpha_0}$$

wo

$$\alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots\ldots$$
$$\beta_0 < \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \ldots\ldots$$
$$\gamma_0 \leqq \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \ldots\ldots$$

und die Menge:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$$

hat die Ordnung n.

B

VII.

Die transfiniete Klassen.

§ 18) *Definition.* Eine geordnete Menge M heisst von der n^{ten} Klasse (n bedeutet eine Kardinalzahl) wenn es eine Teilmenge N von M gibt so dass

1) Die Kardinalzahl von N ist n,

2) Irgend einem Element a von M entspricht ein Element a_1 von N so dass die Mittelstrecke $Sa_1 a$ wohlgeordnet ist.

3) Es gibt keine echte Teilmenge von N die die Eigenschaften 1) und 2) besitzt.

Wie für die endlichen Klassen so ist auch M die geordnete Summe von n Mengen erster Klasse.

§ 19. *Satz. Eine geordnete Menge M kann nicht gleichzeitig zu zwei verschiedenen Klassen gehören.*

Bew. Nehmen wir an, dass nach einem Verfahren die Menge M zur p^{ten} Klasse gehört und nach einem andern zur n^{ten} Klasse und dass p und n zwei verschiedene Zahlen sind die die Mächtigkeiten von den determinierenden Mengen P und N bedeuten.

Einerseits ist die Menge M die Summe von n Mengen erster Klasse, und jede von diesen enthält ein und nur ein Element von N. Sie muss aber auch mindestens ein Element von P enthalten, denn:

Nehmen wir an unter den n Mengen erster Klasse, wäre eine z. B. N_1, die kein Element von P enthält. Betrachten wir irgend ein Element a von N_1. Da die Menge M auch zur p^{ten} Klasse gehört, und da N_1 kein Element von P enthält, gibt es ein nicht in N_1 enthaltenes Element b, von P, so dass die Mittelstrecke S_{ba} wohlgeordnet ist. Es sei N_1 die Menge erster Klasse die b enthält. N_1 ist eine der n Mengen erster Klasse, die M bilden, und ist verschieden von N_1. N_1 enthält aber auch ein Element von N. Es sei a_1 dieses Element. Dann ist die Mittelstrecke $S_{a_1 b}$ wohlgeordnet und folglich auch $S_{a_1 a}$, was unmöglich ist, denn es würde eine Teilmenge von N existieren die die Eingenschaften

§ 18 1) und 2) hat. Folglich enthält jede der n Mengen erster Klasse die M bilden mindestens ein Element von P d. h. es gibt eine Korrespondenz so dass jedem Element von N entspricht ein oder mehrere Elemente von P.

Ganz analog kann man zeigen dass es eine Korrespondenz gibt so dass jedem Element von P ein oder mehrere Elemente von N entsprechen.

Nach dem Bernsteinschen Satz folgt:

$$n = p.$$

§ 20. In den nächsten Ausführungen werden die beiden folgenden Sätze, die Hauptrolle spielen. Die Beweise dieser Sätze benutzen *nicht* das Auswahlaxiom von Zermelo.

a) *Satz von Hartogs* [1]) *Wenn n irgend eine Kardinalzahl bedeutet, gibt es ein Alef* $\aleph_{II}(n)$, *das weder kleiner noch gleich n ist.*

$\aleph_{II}(n)$ ist folgendermassen definiert: Es sei N eine Menge deren Kardinalzahl n ist. Betrachten wir alle wohlgeordneten Mengen deren Elemente gleichzeitig Elemente von N sind, und stellen wir sie in verschiedene Klassen nach ihrer Mächtigkeit [2]) (alle Mengen von derselben Mächtigkeit gehören zu derselben Klasse). Zu jeder Menge von Alefs gibt es ein unmittelbar folgendes Alef [3]). Das auf alle Alefs der verschiedenen Klassen unmittelbar folgende Alef wird mit $\aleph_{II}(n)$ bezeichnet und man sieht das dieses $\aleph_{II}(n)$ weder kleiner noch gleich n sein kann.

b) *Satz von Bernstein* [4]). *Sei m eine transfiniete Kardinalzahl und* $\aleph$ *ein Alef. Ferner*

$$m.\aleph = m + \aleph$$

Dann gilt auch:

$m \geqq \aleph$ oder $m \leqq \aleph$.

(Für den Beweis siehe »Fund. Math«. Bd V).

§ 21. *Bemerkung:* Wenn n eine Kardinalzahl bedeutet, gibt es immer eine Menge M (von dieser sei m die Kardinalzahl) welche zur n^{ten} Klasse gehört, und so dass $m > n$ ist.

---

[1]) *F. Hartogs:* »Über das Problem der Wohlordnung«. M. A. Bd 76.

[2]) Allerdings stellt Hartogs in dieselbe Klasse nur die *ähnliche* wohlgeordneten Teilmengen von N.

[3]) *G. Heissenberg* »Grundzüge der Mengenlehre« Op. cit.

[4]) *A. Tajtelbaum-Tarski:* »Sur quelques théorémes qui équivalent à l'axiome du choix«. Fund. Mat. Bd V.

Mit anderen Worten: jeder Kardinalzahl n entspricht eine Klasse die nicht leer ist. d. h. es gibt eine Menge von dieser Klasse.

In der Tat sei N eine Menge von der Mächtigkeit n, und es sei $\aleph_{II}(n)$ (gemäss § 20) das n entsprechende Alef. Nehmen wir an dass $\aleph_{II}(n)$ derart geordnet ist, dass es zur ersten Klasse gehört und kein erstes Element besitzt. Ersetzen wir alle Elemente von N durch die Menge von der Mächtigkeit $\aleph_{II}(n)$ und es sei m die Kardinalzahl der neuen Menge.

Wir haben $\aleph_{II}(n)$. $n = m$

$$m \geqq n$$

$$m \geqq \aleph_{II}(n)$$

und da $m = n$

nach sich ziehen würde $\aleph_{II}(n) \leqq n$

so folgt $m > n$.

VIII.

Din Gleichung: n. x = m.

§ 22. Betrachten wir die Gleichung:

$$n.\ x = m \qquad (1)$$

wo n, x und m Kardinalzahlen sind. Wenn m ein Alef ist so zeigen folgende Beziehungen: $n \leqq m$; $x \leqq m$
dass n und x ebenfalls Alefs sind.

Es sei: $n = \aleph_n$

$m = \aleph_m$

so folgt dass: 1) wenn $\aleph_m = \aleph_n$

so hat die Gleichung (1) als Lösung für x, jedes $\aleph$, welches der Bedingung

$$\aleph \leqq \aleph_m$$

genügt.

2) wenn $\aleph_m < \aleph_n$

so hat die Gleichung (1) keine Lösung.

3) wenn $\aleph_m > \aleph_n$

so hat die Gleichung (1) nur eine Lösung nämlich $x = \aleph_m$.

Satz: n sei eine Kardinalzahl. Wenn für jede Kardinalzahl m von der Art:

$$m > n$$

die Gleichung (1) mindestens eine Lösung in Alef hat, dann kann n wohlgeordnet werden.

In der Tat werden wir einen schärferen Satz beweisen. Wenn die Gleichung: n. $x = n + \aleph_{H}(n)$ eine Lösung durch ein Alef hat, so kann n wohlgeordnet werden.

Beweis. $\aleph_{H}(n)$ ist das nach dem Satz von Hartogs n entsprechende Alef. Da die Beziehung $\aleph_{H}(n) \leq n$ nicht existieren kann, werden wir haben =

$$n < n + \aleph_{H}(n) \qquad (2)$$

und nach Voraussetzung gibt es ein $\aleph$ so dass

$$\aleph . n = n + \aleph_{H}(n)$$

$$\text{oder } \aleph . n . \aleph = n + \aleph_{H}(n) + \aleph_{H}(n) . \aleph$$

$$n + \aleph_{H}(n) = n + \aleph_{H}(n) + \aleph_{H}(n) . \aleph .$$

Es sind 3 Fälle möglich:

I. $\aleph > \aleph_{H}(n)$; II $\aleph < \aleph_{H}(n)$; III $\aleph = \aleph_{H}(n)$

I. $\aleph > \aleph_{H}(n)$.

Dann:

$$\aleph_{H}(n) . \aleph = \aleph$$

$$n + \aleph_{H}(n) = n + \aleph$$

$$n + \aleph = n . \aleph$$

und gemäss § 20) b) folgt eine der drei Beziehungen

$$\text{a) } n > \aleph ; \text{ b) } n = \aleph ; \text{ c) } n < \aleph .$$

Dem ersten Fall a) folgt:

$$n > \aleph_{H}(n)$$

was dem Satz von Hartogs wiederspricht.

Dem zweiten Fall b) folgt:

$$n = \aleph_{H}(n),$$

was dem Satz von Hartogs ebenfalls wiederspricht. Der letzte Fall c) zeigt dass n einer Teilmenge von $\aleph$ äquivalent ist, und folglich selbst ein Alef ist.

Die Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen zeigen anderseits dass, wenn n ein Alef ist, es nicht möglich ist gleichzeitig die 3 Beziehungen zu erfüllen:

$$\aleph . n = n + \aleph_{H}(n) \qquad (2)$$

$$\aleph > \aleph_{H}(n) \qquad (I)$$

$$\aleph > n \qquad (c)$$

So dass der Fall I ausgeschlossen ist.

II. $\aleph < \aleph_{II}(n)$

Die Beziehung

$$\aleph . n = n + \aleph_{II}(n)$$

gibt $$\aleph_{II}(n) \leq \aleph . n \qquad (3)$$

Es gibt also eine Teilmenge von $n . \aleph$ die dem $\aleph_{II}(n)$ äquivalent ist. Es sei M diese Menge. Es sind zwei Fälle möglich:

a) Entweder ist jedem Element n_r von n ein Paar $n_r a_p$ zugeordnet, das in M enthalten ist (a_p ist ein Element von $\aleph$);

b) oder es gibt ein element n_r von n so dass keines der Paare $n_r a_p$ (a_p durchläuft alle Elemente von $\aleph$) in M enthalten ist.

Im ersten Fall ist es klar dass

$$n < \aleph_{II}(n)$$

denn das Auswahlaxiom ist anwendbar für $\aleph_{II}(n)$, und $n = \aleph_{II}(n)$ ist nach der Eigenschaft von $\aleph_{II}(n)$ ausgeschlossen. n ist also als Teilmenge von $\aleph_{II}(n)$ ein Alef. Aber dann

$$\aleph_{II}(n) \leq \aleph . n \quad \text{(von (3))}$$

$$\text{führt zu} \quad n \geq \aleph_{II}(n)$$

was unmöglich ist.

Der zweite Fall b) ist ebenfalls unmöglich denn:

Betrachten wir die Menge der Elemente von n, von denen wenigstens ein Paar in M enthalten ist. Es sei M_1 diese Teilmenge von n, und sei n_1 seine Kardinalzahl. Da $M = \aleph_{II}(n)$, ist M_1 ein Alef, und n_1 genügt der Bedingung:

$$n_1 . \aleph > \aleph_{II}(n)$$

also $$n_1 \geq \aleph_{II}(n)$$

und da $$n \geq n_1$$

so folgt $$n \geq \aleph_{II}(n)$$

was die Unmöglichkeit zeigt.

Der Fall II) ist auch ausgeschlossen. Es bleibt also nur

III. $\aleph = \aleph_{II}(n)$, und folglich gemäss § 20) b),

besteht eine der 3 Bedingungen:

$$n > \aleph_{II}(n); \quad n = \aleph_{II}(n); \quad n < \aleph_{II}(n).$$

Da die ersten zwei unmöglich sind, zeigt die letzte dass n ein Alef ist. w. z. b. w.

Mit anderen Worten, zeigt der vorige Satz dass: *Wenn jede Menge m, für die*

$$m > n$$

in der n^{ten} Klasse geordnet werden kann, so dass alle Mengen erster Klasse die m bilden gleiche Mächtigkeit haben, dann ist n ein Alef.

§ 23. Als Anwendung wollen wir zeigen dass der *folgende Satz (S) nicht bewiesen werden kann ohne das Auswahlaxiom*[1]).

(S): *Wenn $\aleph_\alpha^!$ und $\aleph_\beta$ zwei unmittelbar aufe nander folgende Alefs sind, und n irgend eine transfinite Kardinalzahl bedeutet dann sind $n \cdot \aleph_\alpha$ und $n \cdot \aleph_\beta$ entweder zwei Mächtigkeiten die unmittelbar aufeinander folgen, oder die gleich sind. D. h. es kann keine Kardinalzahl m existiren die der Bedingung*

$$n \cdot \aleph_\alpha < m < n \cdot \aleph_\beta$$

genügt.

Um den Beweis zu führen brauchen wir folgenden Hilfsatz.

Es sei p eine Kardinalzahl und $\aleph_{II}(p)$ das p gemäss § 20 a) entsprechende Alef. Ferner sei:

$$n = p \cdot \aleph_{II}(p)$$

und $\aleph_{II}(n)$ das n gemäss § 20 a) entsprechende Alef.

Dann sind $\aleph_{II}(p)$ und $\aleph_{II}(n)$ zwei unmittelbar aufeinander folgende Alefs.

Bew. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$ irgend eine wohlgeordnete Menge deren Elemente gleichzeitig Elemente von n sind. Da $n = p \cdot \aleph_{II}(p)$ ist, enthält $\mathfrak{M}$ als Elemente Paare $(p_j ; a_i)$ von einem Element p_j von p, und einem Element a_i von $\aleph_{II}(p)$. (Natürlich braucht $\mathfrak{M}$ nicht alle solche Paare zu enthalten.)

Betrachten wir nur ein Element a_i von $\aleph_{II}(p)$, so dass *mindestens eines* der Paare $(p_j ; a_i)$ in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, und betrachten wir nachher die Menge M_i aller elemente p_j von p so dass das entsprechende Paar $(p_j ; a_i)$ in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Es sei $\overline{M_i}$ die Menge dieser Paare. *Die Existenz von $\overline{M_i}$ folgt daraus dass $\mathfrak{M}$ eine*

[1]) Man findet ähnliche Sätze bei *Tojtelbaum-Tarski*. Op. cit.

wohlgeordnete Menge ist. $\overline{M}_i$ ist als Teilmenge von $\aleph$ auch wohlgeordnet, und folglich:

$$\overline{M}_i \leq \aleph_{II}(p)$$

$\overline{M}_i$ ist aber nichts anderes als das Produkt von M_i mal a_i.

Es folgt dass

$$\aleph \leq \aleph_{II}(p) \cdot \aleph_{II}(p) = \aleph_{II}(p).$$

Also jede wohlgeordnete Menge, deren Elemente gleichzeitig Elemente von n sind, hat eine Mächtigkeit die kleiner oder gleich $\aleph(p)$ ist; $\aleph_{II}(n)$ ist also das auf $\aleph_{II}(p)$ unmittelbar folgende Alef. w. z. b. w.

Bew. des Satzes. Nehmen wir den Satz (S) als gültig an. Es sei p eine Kardinalzahl. Wir setzen wieder:

$$n = p \cdot \aleph_{II}(p).$$

Nach einem allgemeinen Satz[1]) haben wir:

$$n + \aleph_{II}(n) \leq n \cdot \aleph_{II}(n) \qquad (1)$$

Andrerseits hat man:

$$\begin{aligned} n + \aleph_{II}(n) &> n \\ &> p \cdot \aleph_{II}(p) \\ &> p \cdot \aleph_{II}(p) \cdot \aleph_{II}(p) \\ &> n \cdot \aleph_{II}(p) \qquad (2) \end{aligned}$$

Also von (1) und (2):

$$n \cdot \aleph_{II}(p) < n + \aleph_{II}(n) \leq n \cdot \aleph_{II}(n).$$

Nach dem vorangehenden Hilfsatz sind aber $\aleph_{II}(p)$ und $\aleph_{II}(n)$ zwei aufeinander unmittelbar folgende Alefs und da wir den Satz als gültig angenommen haben, kann zwischen $n \cdot \aleph_{II}(p)$ und $n \cdot \aleph_{II}(n)$ keine andere Mächtigkeit existieren. Wir können also nicht

$$n \cdot \aleph_{II}(p) < n + \aleph_{II}(n) < n \aleph_{II}(n)$$

haben, sondern

$$n + \aleph_{II}(n) = n \aleph_{II}(n)$$

und der Satz § 22 zeigt dass n und daher auch p ein Alef ist was dem Auswahlaxiom äquivalent ist. Eine ganz ähnliche Me-

[1]) *A. Schoenflies* »Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen

thode braucht man um zu zeigen dass die 5 folgende Sätze dem Auswahlaxiom äquivalent sind: (Fund. Math. T. V)

m; n; p; q; bedeuten Kardinalzahlen:

1) $m.n = m+n$

2) $m^2 = m$

3) wenn $m < n$ und $p < q$ ist so ist auch $m+p < n+q$,

4) wenn $m < n$ und $p < q$ ist, so ist auch $m.p. < n.q$.

5) wenn $m^2 = n^2$ ist, so ist auch $m = n$.

§ 24. *Satz. Eine geordnete Menge* **M** *gehört immer zu einer Klasse.* (Für den Beweis dieses Satzes werden wir das Auswahlaxiom annehmen).

Beweis: Es sei **M** eine geordnete Menge. Ferner:

1) M_1 die Menge aller wohlgeordneten Teilmengen von **M**,

2) S_1 die Menge aller Mittelstrecken von M und

3) D (M_1, S_1) der Durchschnitt von M_1 und S_1. Elemente von D sind also alle wohlgeordneten Mittelstrecken von M.

Es sei a ein Element von **M**. Da a selbst eine wohlgeordnete Mittelstrecke von **M** ist, ist a in D enthalten. Wir betrachten nun alle Elemente von D, die a enthalten (d. h. alle wohlgeordneten Mittelstrecken von **M**, die a als Element enthalten) und wir bezeichnen mit M_a die Menge aller verschiedenen Elemente von M, die in diesen Elementen von D enthalten sind M_a ist also eine Teilmenge von M und hat folgende Eigenschaften:

1) *M_a ist eine Menge erster Klasse.* Denn: Es bedeute b ein Element von M_a, das von a verschieden ist. Nach der Definition von M_a, folgt, dass b in einer wohlgeordneten Mittelstrecke Sab von M enthalten ist, und dass ausserdem diese Mittelstrecke auch das Element a enthalten soll. Andrerseits sind *alle* Elemente dieser wohlgeordneten Mittelstrecken in M_a enthalten, und da M_a *nur* Elemente von M enthält, und zwar in derselbe Ordnung, so folgt das Sab auch Mittelstrecke von M_a ist. Also ist M_a eine Menge der ersten Klasse.

2) *Es bedeute M_c die zu c entsprechende Menge* (M_c ist analog definiert wie M_a und c ist ein von a verschiedenes Element von M_a). *Dann ist M_a mit M_c identisch.*

Denn: Nehmen wir an, es existiere in M_c ein Element d,

das in M_a nicht enthalten ist. Die Mittelstrecke S_{dc} von M (die identisch ist mit der Mittelstrecke S_{dc} von M_c) ist also wohlgeordnet. Da c auch in M_a enthalten ist, so ist auch die Mittelstrecke S_{ac} von M wohlgeordnet, und folglich auch S_{da}. M_a enthält aber *olle* Elemente. die in den wohlgeordneten Mittelstrecken von M vorkommen, die a enthalten. Also enthält M_a auch das Element d.

Es folgt ohne weiteres, dass, venn l und m zwei verschiedene Elemente von M bedeuten, dann die entsprechenden Mengen M_l und M_m entweder identisch sind, oder dass sie kein Element gemeinsam haben.

3) *Es gilt.* $\sum M_x = M$ *wo das Symbol* $\sum$ *alle verschiedenen Teilmengen von M, die analog mit* M_a *sind, bedeutet.*

Wählen wir nun aus allen Mengen M_x ein Element heraus. Es sei N die Menge dieser Elemente und n seine Kardinalzahl. Dann gehört M zur n^{ten} Klasse. Denn:

Nach 3) ist M die Summe von n Mengen erster Klasse. Es bleibt nun zu zeigen, dass kein Element von den ausgewählten überflüssig ist. Nehmen wir an, dass a ein solches überflüssiges Element von N ist. d. h. es gibt in M ein nicht in M_a enthaltenes Element b, so dass die Mittelstrecke S_{ab} wohlgeordnet ist. Das ist aber unmöglich ; denn M_a enthält *alle* Elemente von M, die in einer wohlgeordneten Mittelstrecke vorkommen die a enthält. Also enthält M_a auch das Element b.

Bemerkung. Es folgt nicht, dass die Mengen M_a im allgemeinen ein erstes Element *nicht* besitzen. Das ist nicht der Fall z. B. in dem Continuum.

Lebenslauf

Ich, Gabriel Sudan, schweizerischer Nationalität, wurde am 26 April 1899 zu Bukarest geboren.

Die Volksschule und das Lyzeum habe ich in Bukarest besucht. Im Herbst 1916 wurde ich an der Bnkarester Universität immatrikuliert. Nach 8 Semestern erwarb ich mir durch Prüfung das „Lizenz-Diplom". Um den Doktorgrad zu erwerben, bin ich nach Göttingen gekommen und wurde hier im Herbst 1922 immatrikuliert.

In Bukarest besuchte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren: Davidoglu, Emmanuel, Lalescu, Nichifor, Pompei, Țițeica.

In Göttigen hörte ich bei den Herren Professoren: Hilbert, Bernstein, Courant, Landau, Pohl.

Es sei mir gestattet an dieser Stelle allen Herren die mich in meiner wissenschaftlichen Ausbildung gefördert haben, meinen Dank auszusprechen, insbesondere Herrn Professor Hilbert und Herrn Professor Bernays für die nützliche Ratschläge, die sie mir erteilt haben.